29/3/18

Για $a, b \in \mathbb{R}$

με $a \leq b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad a \leq b + \varepsilon$

Απόδειξη

Αν $K, \Lambda \subseteq \mathbb{R}$

- $\sup K \leq \inf \Lambda \Leftrightarrow \forall x \in K \ \forall y \in \Lambda, \ x \leq y$

- $\sup K \leq \sup \Lambda \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \sup K \leq \sup \Lambda + \varepsilon \Leftrightarrow$

$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in K) \quad x \leq \sup \Lambda + \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in K \ \exists y \in \Lambda : x \leq y + \varepsilon$

- $\inf K \leq \inf \Lambda \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \inf K - \varepsilon \leq \inf \Lambda \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \forall y \in \Lambda \ \inf K - \varepsilon \leq y$

Αν θέλω να αποδείξω ανισότητες!

Άσκηση: Αν (X, ρ) μ.χ. και $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, τότε $\text{διαμ}(A) = \text{διαμ}(\bar{A})$.

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Γνωρίζω ότι $A \subseteq \bar{A} \Rightarrow \text{διαμ}(A) \leq \text{διαμ}(\bar{A})$

$\sup\{\rho(x,y) : x, y \in A\} \leq \sup\{\rho(x,y) : x, y \in \bar{A}\}$

$(\Leftarrow)$ Απομένει ν.δ.ο. $\text{διαμ}(\bar{A}) \leq \text{διαμ} A$

Αν $\text{διαμ}(A) = +\infty$ τότε $\text{διαμ}(\bar{A}) \leq \text{διαμ}(A)$ ①

Έστω ότι $\text{διαμ}(A) < +\infty$ Έστω $\varepsilon > 0$ [Θ.δ.ο. $\text{διαμ}(\bar{A}) \leq \text{διαμ} A + \varepsilon$

Έστω τυχαία $x, y \in \bar{A}$

Τότε $\exists x_1 \in A : \rho(x, x_1) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists y_1 \in A : \rho(y, y_1) < \frac{\varepsilon}{2}$

Άρα $\rho(x,y) \leq \rho(x, x_1) + \underbrace{\rho(x_1, y_1)}_{\in A} + \rho(y_1, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \text{διαμ}(A) + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \rho(x,y) \leq \text{διαμ} A + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{διαμ}(\bar{A}) < \text{διαμ}(A) + \varepsilon$ Εφόσον αυτό ισχύει για τυχαίο $\varepsilon > 0$ προκύπτει ότι $\text{διαμ}(\bar{A}) \leq \text{διαμ}(A)$ ②

Από ①, ② $\Rightarrow$ διαμ(A) = διαμ$(\bar{A})$

▪ Περιοχές ενός σημείου σε μετρικό χώρο

Έστω (X,ρ) μ.χ και $x \in X$. Ένα $U \subseteq X$ λέγεται περιοχή του x αν $x \in U^\circ$. $(B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq U^\circ \ \exists \varepsilon>0)$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{N}_x$ την οικογένεια περιοχών του x.

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μ.χ, $x \in X$

α) Αν $U \in \mathcal{N}_x$, τότε $U \neq \emptyset$

β) Αν $U \in \mathcal{N}_x$ και $U \subseteq V \subseteq X$, τότε $V \in \mathcal{N}_x$

γ) Αν $A, B \in \mathcal{N}_x$, τότε $A \cap B \in \mathcal{N}_x$

δ) Ένα $G \subseteq X$ είναι ανοικτό αν-ν είναι περιοχή κάθε σημείου του

ε) Για κάθε $U \in \mathcal{N}_x$, υπάρχει $V \in \mathcal{N}_x$ ώστε η U να είναι περιοχή κάθε σημείου του V.

Απόδειξη: α) Αν $U \in \mathcal{N}_x$, τότε $x \in U^\circ$ και εφόσον $U^\circ \subseteq U$ θα ισχύει $x \in U$ (άρα $U \neq \emptyset$)

β) Αν $U \subseteq X$, τότε $U^\circ \subseteq V^\circ$. Έτσι αν $U \in \mathcal{N}_x$, τότε $x \in U^\circ$ άρα $x \in V^\circ$, άρα $V \in \mathcal{N}_x$.

γ) Αν $A, B \in \mathcal{N}_x \Rightarrow x \in A^\circ \wedge x \in B^\circ \Rightarrow x \in A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$, άρα $A \cap B \in \mathcal{N}_x$

δ) G ανοικτό $\Leftrightarrow G = G^\circ \Leftrightarrow G \subseteq G^\circ \Leftrightarrow \forall x \in G$ ισχύει $x \in G^\circ$
$\Leftrightarrow \forall x \in G \quad G \in \mathcal{N}_x$

ε) Ισχύει για $V = U^\circ$

Πρόταση: α) Αν (X,ρ) μ.χ., $A \subseteq X$, $x \in X$, τότε $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{N}_x$ $U \cap A \neq \emptyset$

β) Αν (X,ρ), (Y,d) μ.χ. $f:(X,\rho) \to (Y,d)$ και $x_0 \in X$. Η f είναι συνεχής στο $x_0 \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{N}_{x_0}$ $\exists U \in \mathcal{N}_{x_0} : f(U) \subseteq V$

Απόδειξη: α) $(\Rightarrow)$ Αν $x \in \bar{A}$ και $U \in \mathcal{N}_x$, τότε $x \in U^\circ$, άρα $\exists \varepsilon > 0$ $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq U$.
Εφόσον $x \in \bar{A}$, η $A \cap B_\rho(x,\varepsilon) \neq \emptyset$ και εφόσον $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq U \Rightarrow$ $U \cap A \neq \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ Έστω $\varepsilon > 0$, τότε η $B_\rho(x,\varepsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο που περιέχει το X. Άρα είναι περιοχή του x, άρα από υπόθεση $B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Επομένως $x \in \bar{A}$.

β) $(\Rightarrow)$ Έστω $V \in \mathcal{N}_{f(x)} \Rightarrow f(x_0) \in V^\circ \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ $B_d(f(x_0),\varepsilon) \subseteq V$
Εφόσον f συνεχής στο x_0 $\exists \delta > 0$ ώστε $f(B_\rho(x_0,\delta)) \subseteq B_d(f(x_0),\varepsilon) \subseteq V$. Για $U = B_\rho(x_0,\delta)$ έχουμε το συμπέρασμα.

$(\Leftarrow)$ Έστω $\varepsilon > 0$. Η V $B_d(f(x_0),\varepsilon)$ είναι περιοχή του $f(x_0)$ άρα, από υπόθεση $\exists U$ περιοχή του x_0 ώστε $f(U) \subseteq V = B_d(f(x_0),\varepsilon)$
Εφόσον U περιοχή του x_0, $x_0 \in U^\circ$, $\exists \delta > 0$ $B_\rho(x_0,\delta) \subseteq U$
Άρα $f(B_\rho(x_0,\delta)) \subseteq f(U) \subseteq V = B_d(f(x_0),\varepsilon)$

Άρα f συνεχής στο x_0.

Άσκηση: Έστω (X,ρ) μ.χ. και $A, B \subseteq X$.

i) Αν $A\cup B = X$, ν.δ.ο. $\bar{A}\cup B^\circ = X$ [$A^\circ \cup \bar{B} = X$, λόγω συμμετρίας]

ii) Αν $A\cap B=\emptyset$, ν.δ.ο. $\bar{A}\cap B^\circ=\emptyset$ [$A^\circ\cap\bar{B}=\emptyset$, λόγω συμμετρίας)

Λύση i) Εφόσον $A\cup B=X$, τότε $X\setminus B\subseteq A$.

Άρα $\overline{X\setminus B}\subseteq \bar A$, δηλ. $X\setminus B^\circ \subseteq \bar A \Rightarrow \bar A\cup B^\circ = X$

ή

$X\setminus A\subseteq B$, αφού $A\cup B = X$, $(X\setminus A)^\circ \subseteq B^\circ \Rightarrow X\setminus\bar A \subseteq B^\circ \Rightarrow \bar A\cup B^\circ = X$

ii) $A\cap B=\emptyset \Rightarrow A\subseteq X\setminus B \Rightarrow \bar A\subseteq \overline{X\setminus B} \Rightarrow \bar A \subseteq X\setminus B^\circ \Rightarrow \bar A\cap B^\circ=\emptyset$

ή

$A\cap B=\emptyset \Rightarrow B\subseteq X\setminus A$, $B^\circ \subseteq (X\setminus A^\circ) \Rightarrow B^\circ\subseteq X\setminus\bar A \Rightarrow \bar A\cap B^\circ = \emptyset$

Άσκηση: Έστω (X,ρ) μ.χ. D πυκνό υποσύνολο του X, A ανοικτό υποσύνολο του X. **Ν.Δ.ο.** $\bar A = \overline{A\cap D}$.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Εφόσον $A\cap D = A \Rightarrow \overline{A\cap D}\subseteq\bar A$

($\Leftarrow$) Έστω $x\in\bar A$ (Θ.ν.δ.ο. $x\in\overline{A\cap D}$)

$\Rightarrow \exists\varepsilon>0$ $B_\rho(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$. Εφόσον τα $B_\rho(x,\varepsilon)$ και A ανοικτά, τότε $B_\rho(x,\varepsilon)\cap A$ είναι ανοικτό και μη κενό.

D πυκνό $\Rightarrow B_\rho(x,\varepsilon)\cap A\cap D\neq\emptyset \Rightarrow x\in\overline{A\cap D}$

$X=\bar D$, αφού D πυκνό

Συνεπώς, $\bar A\subseteq\overline{A\cap D}$, άρα $\bar A=\overline{A\cap D}$

D πυκνό $\Rightarrow \bar D = X$, όταν η κλειστή θήκη του είναι ο ίδιος ο μ.χ.

D πυκνό: τέμνει κάθε ανοικτό και μη κενό υποσύνολο

Άσκηση: Έστω (X,ρ) μ.χ. και $A,B \subseteq X$, ώστε $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$. Ν.δ.ο. $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$.

Απόδειξη: ($\Leftarrow$) Γνωρίζουμε ότι γενικά $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$

($\Rightarrow$) Έστω $x \in (A \cup B)^\circ$. Τότε $\exists\, \varepsilon_1 > 0$ $B_\rho(x,\varepsilon_1) \subseteq A \cup B$

Εφόσον, $x \in (A \cup B)^\circ \subseteq A \cup B$, έχουμε ότι $x \in A \vee x \in B$

Αν $x \in A$, τότε εφόσον $A \subseteq \bar{A}$, έχουμε ότι $x \in \bar{A}$ και αφού $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, το x σίγουρα δε θα ανήκει στο $\bar{B}$.

Συνεπώς, $\exists\, \varepsilon_2 > 0$: $B_\rho(x,\varepsilon_2) \cap B = \emptyset$

Θέτουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$ (αφού $\varepsilon_1 > 0$ και $\varepsilon_2 > 0$)

$B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq A \cup B$ $[\varepsilon \leq \varepsilon_1 \Rightarrow B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq B_\rho(x,\varepsilon_1) \subseteq A \cup B]$

και $B_\rho(x,\varepsilon) \cap B \subseteq B_\rho(x,\varepsilon_2) \cap B = \emptyset$. Έτσι,

$$\left.\begin{array}{l} B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq A \cup B \\ B_\rho(x,\varepsilon) \cap B = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq A$$

Συνεπώς, $x \in A^\circ$.

$A^\circ \subseteq A^\circ \subseteq B^\circ$

Αν $x \in B$, με όμοιο τρόπο, $x \in B^\circ \subseteq A^\circ \cup B^\circ$.

Άρα, $(A \cup B^\circ) \subseteq A^\circ \cup B^\circ$. Συνεπώς, $A^\circ \cup B^\circ = (A \cup B)^\circ$.

<u>Άσκηση</u>: Έστω (X,ρ) μ.χ

α) Αν A,B ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του X, τότε το $A\cap B$ είναι ανοικτό (πυκνό)

β) Αν K,Λ κλειστά υποσύνολα του X με $K^\circ = \emptyset \wedge \Lambda^\circ = \emptyset$, τότε

$(K\cup\Lambda)^\circ = \emptyset$

<u>Απόδειξη</u>: α) Έστω G ανοικτό μη κενό σύνολο. Εφόσον A πυκνό τότε $A\cap G \neq \emptyset \Rightarrow$ Αφού A, G ανοικτά, τότε $A\cap G$ ανοικτό. Εφόσον B πυκνό, τότε $A\cap G\cap B \neq \emptyset$. Όμως, A,B,G ανοικτά $A\cap B\cap G \neq \emptyset$. Συνεπώς, $A\cap B$ είναι πυκνό, αφού τέμνει το τυχαίο μη κενό $G\subseteq X$.

β) Τα $X\setminus K \wedge X\setminus\Lambda$ είναι ανοικτά (αφού K,Λ κλειστά)

$$\overline{X\setminus K} = X\setminus K^\circ = X\setminus\emptyset = X$$

$$\overline{X\setminus \Lambda} = X\setminus \Lambda^\circ = X\setminus\emptyset = X$$

Έχουμε ότι τα $X\setminus K \wedge X\setminus\Lambda$ είναι ανοικτά και πυκνά, τότε $(X\setminus K)\wedge(X\setminus\Lambda)$ πυκνό σύνολο [από το (α)] $X\setminus(K\cup\Lambda)^\circ = X \Rightarrow (K\cup\Lambda)^\circ = \emptyset$.

$$X\setminus(K\cup\Lambda) \Rightarrow X\setminus(\overline{K\cup\Lambda}) = X \Rightarrow$$

<u>Ορισμός</u>: Μια ιδιότητα (P) που αφορά μετρικούς χώρους, λέγεται τοπολογική ιδιότητα αν για κάθε μετρικό χώρο (X,ρ) ώστε ο (X,ρ) να έχει την ιδιότητα (P) και d ισοδύναμη μετρική στο X, τότε ο (X,d) έχει την ιδιότητα (P).

Παραδείγματα:

α) Η ιδιότητα να είναι ένας μ.χ. φραγμένος δεν είναι τοπολογική ιδιότητα.

Π.χ. Ο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική δεν είναι φραγμένος ($diam(\mathbb{R}) = +\infty$), αλλά υπάρχει μετρική ισοδύναμη της συνήθους μετρικής που είναι φραγμένη.

β) Η ιδιότητα να είναι ένας χώρος διαχωρίσιμος είναι τοπολογική ιδιότητα.

Πράγματι, αν (X, ρ) διαχωρίσιμος και $d \sim \rho$. Υπάρχει $D \subseteq X$, ώστε D αριθμήσιμο και D πυκνό στον (X, ρ) και αφού $d \sim \rho$, τότε D πυκνό και στον (X, d).

Πράγματι, αν $x \in X$, τότε εφόσον D πυκνό στον (X, ρ) υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x \xRightarrow{\rho \sim d}$

$x_n \xrightarrow{d} x$